ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΙΙ

1. Παραμετρική επιφάνεια έχει παραμετρική παράσταση

$$X(u,v) = (u - f(u-v), u, v)), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση. (i) Αποδείξτε ότι όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα της είναι παράλλη προς σταθερή διεύθυνση. (ii) Υπολογίστε την κάθετη καμπυλότητα σε κάθε σημείο της για την διεύθυνση του ερωτήματος (i). (iii) Βρείτε την καμπυλότητα Gauss. (iv) Είναι η επιφάνεια ευθειγενής;

2. Παραμετρική επιφάνεια έχει παραμετρική παράσταση

$$X(u,v) = (u, v, e^u + e^v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Να υπολογιστεί η πρώτη κι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή. (ii) Να υπολογιστεί η κάθετη καμπυλότητα στη διεύθυνση $c'(1)$, όπου c είναι η επιφανειακή καμπύλη $c(t) = X(t, t^2)$. (iii) Να υπολογίστε την κάθετη καμπυλότητα στις εφαπτομενικές διευθύνσεις των παραμετρικών καμπυλών.

3. Παραμετρική επιφάνεια έχει παραμετρική παράσταση

$$X(u,v) = (u, v, u^2 + v^3), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Να βρεθούν τα ελλειπτικά, υπερβολικά, ισόπεδα, παραβολικά και ομφαλικά σημεία της.

4. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια έχει παραμετρική παράσταση

$$X(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2}), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Να βρεθεί η απεικόνιση Gauss καθώς και η σφαιρική της εικόνα.

5. Αν όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα μιας κανονικής επιφάνειας S είναι παράλληλα προς σταθερή ευθεία, να αποδειχθεί ότι η καμπυλότητα Gauss της S είναι παντού μηδέν.

6. Αποδείξτε ότι αν όλες οι κάθετες ευθείες μιας κανονικής και συνεκτικής επιφάνειας S διέρχονται από κοινό σημείο, τότε η S είναι τμήμα σφαίρας.

7. Αν από σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας διέρχονται τρείς διακεκριμμένες ευθείες που ανήκουν στην επιφάνεια, τότε αποδείξτε ότι το p είναι ισόπεδο σημείο.